L3 MTH1610
Université Bretagne Sud
2015-2016

Feuille de TD Hors-Série
Séries numériques

Exercice 1. Déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$ dans les cas suivants :

1. $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \frac{n!}{n^n}$.
2. $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \frac{n^2}{2^n+n}$.
3. $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \ln\left(\frac{1+\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\tan\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$.
4. $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \arctan\left(\frac{2n}{3n^2+1}\right)$.
5. $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Exercice 2. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n-2}\right)^{n^2}$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $a > 0$, on pose $u_n = \frac{1}{(n+a)(n+a+1)(n+a+2)}$. Montrer que la série $\sum_n u_n$ converge absolument et calculer la somme totale $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 4. Déterminer un équivalent simple de $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 5. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n n-sqrtn}$, $\forall n \geqslant 1$.

Exercice 6.

1. Montrer de la série $\sum_n u_n$ où $\forall n \geqslant 0$, $u_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$, converge absolument.
2. Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. *Indication : faire apparaitre une somme télescopique à l'aide d'une formule* $\arctan(x) - \arctan(y) = \ldots$.

Exercice 7. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \cos\left(\pi n^2 \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$, $\forall n \geqslant 2$. *Indication : faire une développement limité jusqu'à l'ordre* 4.

Exercice 8. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{1+2^{1/2}+3^{1/3}+\cdots+n^{1/n}}$.

Exercice 9. On pose pour tout réel $a > 0$ et tout $n \geqslant 2$, $u_n = \frac{a^n}{\sum_{k=2}^{n}\ln^2(k)}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $p \in \{2,\ldots,n\}$, $u_n \leqslant \frac{a^n}{(n-p+1)\ln^2(p)}$.
2. En déduire la nature de la série $\sum_n u_n$ suivant les valeurs de a.

Exercice 10. On pose pour $p \in \mathbb{N}$ et tout $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{1+2!+3!+\cdots+n!}{(n+p)!}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \frac{n!}{(n+2)!}\left(1+\frac{2}{n}\right)$.
2. En déduire la nature de la série $\sum_n u_n$ suivant les valeurs de p.

Exercice 11. Pour tout $n \geqslant 0$, on définit par récurrence $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n^2}$ et $x_0 \geqslant 0$.

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée et ne possède qu'une seule valeur d'adhérence que l'on notera dans la suite l.
2. On pose pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = x_{n+1} - x_n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée et que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. On pose pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Montrer que pour tout $(x,y) \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$ puis montrer que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire la convergence de la série $\sum_n u_n$ puis exprimer l en fonction de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et de x_0.